On the lacunas in boundary value problems (Integral representations and twisted cohomology in the theory of differential equations)

数理解析研究所講究録 1212 巻 2001 年 102-115

On the lacunas in boundary value problems

阪大理・数　由良 浩一 (Koichi Yura)
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

本稿は，ある定数係数双曲型境界値問題において lacuna の理論を展開したものである．境界値問題あるいは混合問題では，初期値問題にはあらわれない側面波 (lateral wave) や境界波 (boundary wave) があらわれ，そこでの sharpness を調べることは興味深い問題である．また，主反射波 (main reflected wave) の sharpness も境界条件との関係で，反射前の sharpness がそのまま遺伝するのかどうかも自明ではない．

1　定数係数双曲型境界値問題の前進基本解

$x=(x_1,\dots,x_n)$ に対して，$x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$ などとして次のような定数係数双曲型境界値問題を考える．

$$\begin{cases} P(D)F_{k^0}(x)=0, & x\in\{x\in\mathbf{R}^n\,;x_n>0\},\\ B_j(D)F_{k^0}(x)\Big|_{x_n=0}=\delta_{jk^0}\delta(x'), & x'\in\mathbf{R}^{n-1},\ 1\le j\le\mu. \end{cases} \tag{BP}$$

k_0 は $1\le k_0\le\mu$ で固定する．$P(D)$, $B_j(D)$ はそれぞれ n 変数 m 階，n 変数 r_j 階の斉次微分作用素であり，$B_j(D)$ $(1\le j\le\mu)$ の個数 μ はあとで決められる．また，$D=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ である．ここで次の仮定をおく．仮定 (A-1), (A-2) はあとで条件を弱めることができる．

(A-1). $P(\xi)$ は $\vartheta=(1,0,\dots,0)$ に関して双曲型で，$\mathbf{C}$ で既約である．

(A-2). P と $\frac{\partial P}{\partial\xi_n}$ の ξ_n に関する終結式 $\mathscr{R}(\xi')$ の $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ での局所化 (定義 2.1) が ϑ' に関して双曲型である．

(A-3). $\{x\in\mathbf{R}^n\,;x_n=0\}$ は $P(\xi)$ に関して非特性的である．すなわち，$P(0,1)\neq0$.

(A-4). (BP) は $\mathscr{E}$ 適切である．すなわち，Lopatinskiĭ 行列式 $R(\xi')$ は ϑ' に関して双曲型である．

$F_{k^0}(x)$ は，境界 $\{x\in\mathbf{R}^n\,;x_n=0\}$ 上に単位衝撃を与えたときの波動の伝播をあらわす．以下，$F_{k^0}(x)$ を記述するための準備をする．

$$\Gamma(P,\vartheta)=\mathbf{R}^n\setminus\{\xi\in\mathbf{R}^n\,;P(\xi)=0\}\ \text{の}\ \vartheta\ \text{を含む連結成分}$$

の $\xi_n=0$ での切り口 $\Gamma^0(P,\vartheta)$ を，

$$\Gamma^0(P,\vartheta)=\{\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\,;(\xi',0)\in\Gamma(P,\vartheta)\}$$

で定義する.

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_{m-j}(\xi')\xi_n{}^j$$

とあらわせば, $P_0(\xi') = P(0,1)$ であるから, 仮定 (A-3) より $P_0(\xi')$ は 0 でない定数である. また, $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \pm i\Gamma^0(P,\vartheta)$ に対して, $P(\xi',\lambda) = 0$ は λ に関して実根をもちえないので, それらの根を

$$\lambda_1^+(\xi'),\ldots,\lambda_\mu^+(\xi'),\lambda_1^-(\xi'),\ldots\lambda_{m-\mu}^-(\xi'), \qquad (1)$$
$$\operatorname{Im}\lambda_k^{\pm}(\xi') \gtrless 0$$

とあらわすことができる. もちろん, μ は $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \pm i\Gamma^0(P,\vartheta)$ なる限り一定である. この μ が (BP) の境界条件の個数である.

これらを使って, (BP) に対する Lopatinskiĭ 行列式 $R(\xi')$ を定義する. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \pm i\Gamma^0(P,\vartheta)$ に対して,

$$R(\xi') = \det L(\xi'),$$
$$L(\xi') = \left(\frac{1}{2\pi i}\oint B_j(\xi',\lambda)\lambda^{k-1}P_+(\xi',\lambda)^{-1}\,d\lambda\right)_{j,k=1,\ldots,\mu}, \qquad (2)$$
$$P_+(\xi',\lambda) = \prod_{j=1}^{\mu}(\lambda - \lambda_j^+(\xi'))$$

とおく. ただし, (2) の積分は複素 λ 平面において, $P_+(\xi',\lambda) = 0$ の根を全て囲むような単一閉曲線に沿うものである. これより, $P_+(\xi)$, $R(\xi')$ はそれぞれ

$$(\xi_n,\lambda_1^+(\xi'),\ldots,\lambda_\mu^+(\xi')), \quad (\xi',\lambda_1^+(\xi'),\ldots,\lambda_\mu^+(\xi'))$$

の多項式 (特に $(\lambda_1^+(\xi'),\ldots,\lambda_\mu^+(\xi'))$ の対称式) で, μ 次, $\gamma = \sum_{j=1}^{\mu} r_j - \mu(\mu-1)/2$ 次斉次であることがわかる. このとき, 前進基本解 $F_{k^0}(x)$ は仮定 (A-4) を使えば,

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n}i^{-1}\sum_{j=1}^{\mu}\int_{\mathbf{R}^n - i\vartheta} e^{ix\xi}R_{jk^0}(\xi')\xi_n^{j-1}(R(\xi')P_+(\xi))^{-1}\,d\xi \qquad (3)$$

であらわされる. ここで, $R_{jk^0}(\xi')$ は $L(\xi')$ の (k^0,j) 余因子 ($\gamma+\mu-r_{k^0}-j$ 次斉次) である. 超関数 $F_{k^0}(x)$ は, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ として,

$$\begin{aligned}\langle F_{k^0}(\cdot),\varphi\rangle &= i^{-1}\sum_{j=1}^{\mu}\int_{\mathbf{R}^n} R_{jk^0}(\xi'-i\vartheta')(\xi_n - i\vartheta_n)^{j-1} \\ &\qquad (R(\xi'-i\vartheta')P_+(\xi-i\vartheta))^{-1}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi-i\vartheta)\,d\xi\end{aligned}$$

で定義される. また, 前進基本解 (forward fundamental solution) とは,

$$\operatorname{supp} F_{k^0}(x) \subset \{x \in \mathbf{R}^n\,;\, x\vartheta \geq 0\}$$

となる基本解である.

2 双曲錐 $\Gamma_\xi(RP_+,\vartheta)$

境界値問題の基本解 $F_{k^0}(x)$ は初期値問題の場合と異なり，単に特性集合を複素の方向に避けて積分すれば良いというものではない．これは R_{jk^0}, R, P_+ が，ある集合の上で m 重に分岐するからである．したがって，その分岐集合も複素の方向に避けなければならない．このことに注意して R, P_+ の局所双曲錐を定義していく．

定義 2.1 $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$ を開連結錐，f を $\mathbf{R}^n-i\Gamma$ で斉次の解析関数とする．$\xi^0\in\mathbf{R}^n$, $\zeta\in\mathbf{R}^n-i\Gamma$ に対して，$f(\xi^0+t\zeta)$ を t の巾で展開すると，

$$t\to+0 \text{ のとき，}\quad f(\xi^0+t\zeta)=t^pf_{\xi^0}(\zeta)+o(t^p)$$

となるとき，ζ の関数として恒等的には 0 にならない最初の係数 f_{ξ^0} を f の ξ^0 における局所化という．

□

この定義 2.1 で $\mathbf{R}^n-i\Gamma$ を $\mathbf{R}^{n-1}-i\Gamma^0(P,\vartheta)$ に変えれば，根 λ_j^+ $(1\le j\le\mu)$ の局所化を考えることができる (Wakabayashi [3][4] を参照)．したがって，R, P_+ を局所化することができる．

$$\Gamma'_{\xi'}(\mathscr{R},\vartheta')=\mathbf{R}^{n-1}\setminus\{\eta'\in\mathbf{R}^{n-1};\mathscr{R}_{\xi'}(\eta')=0\} \text{ の } \vartheta' \text{ を含む連結成分,}$$
$$\Gamma'_{\xi'}(R,\vartheta')=\{\eta'\in\Gamma'_{\xi'}(\mathscr{R},\vartheta');R_{\xi'}(-i\eta')\neq0\} \text{ の } \vartheta' \text{ を含む連結成分,}$$
$$\Gamma_\xi(P_+,\vartheta)=\{\eta\in\Gamma'_{\xi'}(\mathscr{R},\vartheta')\times\mathbf{R};P_{+\xi}(-i\eta)\neq0\} \text{ の } \vartheta \text{ を含む連結成分,}$$
$$\Gamma_\xi(RP_+,\vartheta)=\{\Gamma'_{\xi'}(R,\vartheta')\times\mathbf{R}\}\cap\Gamma_\xi(P_+,\vartheta)$$

で定義する．また，$\Gamma_\xi(RP_+,\vartheta)$ の双対錐 $K_\xi(RP_+,\vartheta)$ を

$$K_\xi(RP_+,\vartheta)=\{x\in\mathbf{R}^n;\eta\in\Gamma_\xi(RP_+,\vartheta) \text{ ならば } x\eta\ge0\}$$

で定義する．

$P(\xi)$ が ϑ に関して双曲型多項式のとき，P に対しても成り立つことはよく知られている．

RP_+ が $\eta\in\Gamma_0(RP_+,\vartheta)$ に関して双曲型であることから，

$$F_{k^0}(x)=(2\pi)^{-n}i^{-1}\sum_{j=1}^{\mu}\int_{\mathbf{R}^n-i\eta}e^{ix\xi}R_{jk^0}(\xi')\xi_n^{j-1}(R(\xi')P_+(\xi))^{-1}\,d\xi,\quad \eta\in\Gamma_0(RP_+,\vartheta)$$

とも書け，

$$\operatorname{supp}F_{k^0}(x)\subset K_0(RP_+,\vartheta)$$

となることがわかる．なぜなら $x\eta<0$ のとき，十分大きい t をとり η を $t\eta$ で置き換えても Stokes の公式より積分の値は変わらない．ところが $t\to+\infty$ とすれば超関数の意味で 0 になるからである．

$$W(RP_+,\vartheta)=\bigcup_{\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}}K_\xi(RP_+,\vartheta)$$

とおくと，$\Gamma_\xi(RP_+,\vartheta)$ の定義より，[1] と同じ方法で次が得られる．

補題 2.2 $x \notin \pm W(RP_+,\vartheta)$ のとき，次を満たす C^∞-ベクトル値関数 $v(\xi)$ が存在する．

- $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ のとき，

$$v(\lambda\xi) = |\lambda| v(\xi).$$

- 任意の $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ に対して，

$$v(\xi) \in \Gamma_\xi(RP_+,\vartheta) \cap \{\xi \in \mathbf{R}^n; x\xi = 0\}.$$

- $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $0 < t \leq 1$ のとき，

$$\mathscr{R}(\xi' \pm itv(\xi)')R(\xi' \pm itv(\xi)')P_+(\xi \pm itv(\xi)) \neq 0.$$

□

上の条件を満たすベクトル値関数 $v(\xi)$ の集合を $V(RP_+,X,\vartheta)$ と書く．この補題2.2を使って，

$$\operatorname{sing\,supp} F_{k^0}(x) \subset W(RP_+,\vartheta) \tag{4}$$

を，Wakabayashi[4] と同様に示せるが，$\Gamma'_{\xi'}(R,\vartheta')$ などの定義が [4] に比べて一般に悪いため，(4) の評価も [4] に比べて悪いものになる可能性がある．

3 ホモロジー類 $[\alpha_x^\dagger]$

ベクトル値関数の集合 $V(RP_+,X,\vartheta)$ を用いて Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式にあらわれるホモロジー類 $[\alpha_x^\dagger]$ を構成する．方法は Atiyah-Bott-Gårding[1] と同じである．

Kronecker の微分形式を

$$\omega(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \zeta_j d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \cdots \wedge d\zeta_n, \tag{5}$$

$\mathcal{S}_X^{n-1}$ を，ξ 空間における S^{n-1} に $(x\xi)\omega(\xi) > 0$ なる向きを入れたチェイン (境界が $\{x\xi = 0\}$ に含まれる実 $(n-1)$ 次元相対サイクル) とする．$\mathcal{S}_X^{n-1}$ のうち $x\xi > 0$ の側の半球と $x\xi < 0$ の側の半球の向きが逆であるから，$\mathcal{S}_X^{n-1} \cap \{x\xi = 0\}$ にはどちら側からも同じ向きが誘導されることになる．これを $\omega_x(\xi) > 0$ の向きと定めておく．$\frac{1}{2}\mathcal{S}_X^{n-1}$ の境界 $\frac{1}{2}\partial\mathcal{S}_X^{n-1}$ は，$S^{n-1} \cap \{x\xi = 0\}$ すなわち S^{n-2} に，向きを $\omega_x(\xi) > 0$ で入れたチェイン (実 $(n-2)$ 次元サイクル) となる．

定義 3.1 $x \notin \pm W(RP_+, \vartheta)$, $v \in V(RP_+, X, \vartheta)$ のとき,

$$\begin{aligned} \alpha_{x,v} &= \text{chain-}\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_X^{n-1}\}, \\ \bar{\alpha}_{x,v} &= \text{chain-}\{\xi + iv(\xi)\,;\xi \in \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_X^{n-1}\} \end{aligned}$$

とおく. $\mathcal{S}_X^{n-1}$ の前についた $\frac{1}{2}$ はチェインの係数である.

□

定義3.1 で, chain-$\{\cdot\}$ と書いたのは, 単なる点集合と向き付け可能で向きが定義されたチェインを区別しているからである (点集合は $\{\cdot\}$ と書いている). $\alpha_{x,v}$, $\bar{\alpha}_{x,v}$ の向きは $\frac{1}{2}\mathcal{S}_X^{n-1}$ から誘導される向きをもつ.

X^*, $\mathscr{R}^*$ をそれぞれ $X = \{\zeta \in \mathbf{C}^n\,; x\zeta = 0\}$, $\{\zeta' \in \mathbf{C}^{n-1}\,;\mathscr{R}(\zeta') = 0\} \times \mathbf{C}$ の複素射影空間 $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ への像とし, $\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}}$, Φ_{X^*} をそれぞれ $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \setminus \mathscr{R}^*$, $X^* \setminus \mathscr{R}^*$ の m 重被覆面とする. また, $(RP_+)^\dagger$ によって $\{\zeta \in \Phi_{\mathbf{C}^n}\,; R(\zeta')P_+(\zeta) = 0\}$ の $\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}}$ における像をあらわす. ここで, $\Phi_{\mathbf{C}^n}$ は $\mathbf{C}^n \setminus (\{\zeta' \in \mathbf{C}^{n-1}\,;\mathscr{R}(\zeta') = 0\} \times \mathbf{C})$ の m 重被覆面.

定義 3.2 $\alpha_{x,v}$, $\bar{\alpha}_{x,v}$ の $\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}}$ への像 $\alpha_{x,v}^\dagger$, $\bar{\alpha}_{x,v}^\dagger$ は, v の選び方に依存せず, ホモロジー群

$$H_{n-1}(\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}} \setminus (RP_+)^\dagger, \Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^\dagger; \mathbf{C})$$

の元を定めるので $[\alpha_x^\dagger]$, $[\bar{\alpha}_x^\dagger]$ と書く. 境界作用素 ∂ は

$$\partial : H_{n-1}(\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}} \setminus (RP_+)^\dagger, \Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^\dagger; \mathbf{C}) \to H_{n-2}(\Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^\dagger; \mathbf{C})$$

を定めるので, $\partial[\alpha_x^\dagger]$, $\partial[\bar{\alpha}_x^\dagger]$ は $H_{n-2}(\Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^\dagger; \mathbf{C})$ の元である.

□

ホモロジー類 $[\alpha_x^\dagger]$, $\partial[\alpha_x^\dagger]$ は, n の偶奇によって大きく異なる. これを見るために次の補題を準備する.

補題 3.3 写像 $\imath : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ を $\imath(\zeta) = -\zeta$ で定義すると,

$$\imath(\bar{\alpha}_{x,v}) = (-1)^{n-1}\alpha_{x,v},\ \imath(\partial\bar{\alpha}_{x,v}) = (-1)^{n-1}\partial\alpha_{x,v}. \tag{6}$$

□

(証明) (6) を書き直せば,

$$\text{chain-}\{-\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_X^{n-1}\} = (-1)^{n-1}\text{chain-}\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_X^{n-1}\}, \tag{7}$$

$$\text{chain-}\{-\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \tfrac{1}{2}\partial\mathcal{S}_X^{n-1}\} = (-1)^{n-1}\text{chain-}\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \tfrac{1}{2}\partial\mathcal{S}_X^{n-1}\}. \tag{8}$$

(7),(8) を証明する前に, 各右辺の $(-1)^{n-1}$ を中括弧の中に入れることはできないことを注意しておく. この $(-1)^{n-1}$ はチェインの向きあるいは係数をあらわしていて, $\mathcal{S}_X^{n-1}$ の係数 $\frac{1}{2}$ と同じである. これに対して, 写像 $\imath$ は中括弧の中に -1 を入れて, チェイン上の点の座標そのものを変える写像である.

(7),(8) を示す．簡単のために係数の $\frac{1}{2}$ は略して考える (2倍のチェインを考えていることになるが，それは差し支えない)．チェイン chain-$\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \mathcal{S}_X^{n-1}\}$ において，ξ は S^{n-1} 上の点だから ξ を $-\xi$ としても，ベクトル値関数 $v(\xi)$ の次数1の正斉次性より集合としては同じである．すなわち，写像 $\jmath : S^{n-1} \to S^{n-1}$ を $\jmath(\xi) = -\xi$ で定義すると，

$$\begin{aligned}\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in S^{n-1}\} &= \{-\xi - iv(\xi)\,;\xi \in S^{n-1}\}\\ &= \{\jmath(\xi) - iv(\jmath(\xi))\,;\xi \in S^{n-1}\}\\ &= \jmath^*\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in S^{n-1}\}.\end{aligned}$$

もちろんチェインとしては向きが変わるかもしれない．向きについては，$\mathcal{S}_X^{n-1}$ が $x\xi \neq 0$ なるところで $(x\xi)\omega(\xi) > 0$，$x\xi = 0$ なるところで $\omega_x(\xi) > 0$ なる向きをもっていたので，ξ を $-\xi$ としたとき $(-1)^{n-1}(x\xi)\omega(\xi) > 0$，$(-1)^{n-1}\omega_x(\xi) > 0$ となることから，$\jmath^*\mathcal{S}_X^{n-1} = (-1)^{n-1}\mathcal{S}_X^{n-1}$．ゆえに，

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\text{chain-}\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \mathcal{S}_X^{n-1}\} &= \text{chain-}\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in (-1)^{n-1}\mathcal{S}_X^{n-1}\}\\ &= \text{chain-}\{\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \jmath^*\mathcal{S}_X^{n-1}\}\\ &= \text{chain-}\{\jmath(\xi) - iv(\jmath(\xi))\,;\xi \in \mathcal{S}_X^{n-1}\}\\ &= \text{chain-}\{-\xi - iv(\xi)\,;\xi \in \mathcal{S}_X^{n-1}\}.\end{aligned}$$

したがって (7) が証明された．(8) も同様である．

■

補題3.3 より，

$$[\bar{\alpha}_x^\dagger] = (-1)^{n-1}[\alpha_x^\dagger],\ \partial[\bar{\alpha}_x^\dagger] = (-1)^{n-1}\partial[\alpha_x^\dagger]. \tag{9}$$

したがって，特に $2[\alpha_x^\dagger]$, $2\partial[\alpha_x^\dagger]$ は，$\alpha_{x,v}^\dagger + (-1)^{n-1}\bar{\alpha}_{x,v}^\dagger$，$\partial\alpha_{x,v}^\dagger + (-1)^{n-1}\partial\bar{\alpha}_{x,v}^\dagger$ を代表元にもつ．

$[\alpha_x^\dagger]$, $\partial[\alpha_x^\dagger]$ の x に関する連続性を示す次の定理をあげておく．これは，ある点 x^0 で $[\alpha_{x^0}^\dagger] = 0$ あるいは $\partial[\alpha_{x^0}^\dagger] = 0$ が成り立てば，x^0 の近傍の点 y でも $[\alpha_y^\dagger] = 0$ あるいは $\partial[\alpha_y^\dagger] = 0$ となることを保証するものである．証明は Atiyah-Bott-Gårding[1] と同じである．

定理 3.4 $x \notin \pm W(RP_+, \vartheta)$ とする．このとき x に応じて $|y - x|$ が十分小さいとき，

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}} \setminus (RP_+)^\dagger, \Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^\dagger; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-2}(\Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^\dagger; \mathbf{C}) \\ \Big\downarrow \varphi & & \Big\downarrow \psi \\ H_{n-1}(\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}} \setminus (RP_+)^\dagger, \Phi_{Y^*} \setminus (RP_+)^\dagger; \mathbf{C}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-2}(\Phi_{Y^*} \setminus (RP_+)^\dagger; \mathbf{C}) \end{array}$$

なる図式が可換である．ここで，Φ_{Y^*} は Φ_{X^*} の定義と同様である．$\varphi : [\alpha_x^\dagger] \to [\alpha_y^\dagger]$，$\psi : \partial[\alpha_x^\dagger] \to \partial[\alpha_y^\dagger]$ は $[\alpha_x^\dagger]$ を Y^* へ射影することによって得られる．

4 Herglotz-Petrovskiĭ-Lerayの公式

Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式 (以下の (17), (18)) は lacuna の問題を代数幾何学の問題に帰着させるために必要な基本解の最終的な表現である．これを証明するには，(3) の ϑ をベクトル値関数 $v \in V(RP_+, X, \vartheta)$ にし，極座標を用いて動径方向に積分し，ホモロジー類上の積分に直せばよい．動径方向の積分をしたあとにあらわれる関数について先に見ておく．

関数 $\chi_s(z)$ $(z, s \in \mathbf{C},\ 0 < \arg z < \pi)$ を

$$\chi_s(z) = \begin{cases} \Gamma(-s)e^{-\pi i s} z^s, & s \neq 0, 1, \ldots, \\ z^s(\log z^{-1} + c_s + \pi i)/s!, & s = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

で定義する．ここで，$c_s = \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{s} k^{-1}$，$c_0 = \Gamma'(1)$ である．$\chi_s(z)$ は ρ_+^{-s-1} の Fourier 変換の i^{-s} 倍である (Gel'fand-Shilov[2] 参照)．すなわち，

$$\chi_s(z) = i^{-s} \int_0^{\infty} \rho^{-s-1} e^{i\rho z}\, d\rho, \quad \arg i = \pi/2. \tag{10}$$

$\chi_s(z)$ は s を固定するごとに $\operatorname{Im} z > 0$ で正則ゆえ，実軸への境界値として超関数を定める．それを $\chi_s(x + i0)$ と書く．$\chi_s(x + i0)$ は s の整関数である．また，$\sigma_q \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ を

$$\sigma_q(x) = (2\pi i)^{-1}\{\chi_q(x + i0) - (-1)^q \chi_q(-x + i0)\}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11}$$

で定義すれば，$q = N = 0, 1, \ldots$ のときは，$\chi_N(x)$ の log 項が消えて，

$$\sigma_q(x) = 2^{-1}(\operatorname{sgn} x) x^q / q!, \quad q = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

$q = -N = -1, -2, \ldots$ のときは，$\sigma_q' = \sigma_{q-1}$，$\sigma_0(x) = 2^{-1}(\operatorname{sgn} x)$ より，

$$\sigma_q(x) = \delta^{(-q-1)}(x), \quad q = -1, -2, \ldots. \tag{13}$$

この関数 $\chi_s(z)$ の性質 (10) により，次の補題が成り立つ．

補題 4.1 $v \in V(RP_+, X, \vartheta)$ とし，$F_{k^0}(x)$ は (3) で与えたものとする．$x \notin \pm W(RP_+, \vartheta)$ のとき，

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{|\xi|=1} i^{r_{k^0} - n} \chi_{r_{k^0} - n + 1}(x\zeta) R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} (R(\zeta') P_+(\zeta))^{-1}\, \omega(\zeta) \tag{14}$$

と書ける．ただし，$\zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta)$ で，$\varepsilon > 0$ は $R(\zeta')P_+(\zeta) \neq 0$ なるぐらい十

(証明) $x \notin \pm W(RP_+,\vartheta)$ のとき，Stokes の公式を用いれば，

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\zeta} R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1}(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1}\, d\zeta \tag{15}$$

と書ける．ただし，$\zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta)$ である．

(15) に極座標変換 $\xi = \rho\eta$, $|\eta| = 1$ をほどこせば，被積分関数の斉次性から

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\rho x\sigma} \rho^{-r_{k^0}+n-2} R_{jk^0}(\sigma')\sigma_n^{j-1}(R(\sigma')P_+(\sigma))^{-1}\, d\rho \wedge \omega(\sigma).$$

ここで，$\sigma = \eta - i(v(\eta) - \varepsilon|\eta|\vartheta)$ とした．(10) を使って動径方向に積分すれば，(14) が得られる．

■

あとは (14) をホモロジー類上の積分に直すだけであるが，そのとき必要となる Leray の tube operation を定義する．

$X \setminus (\{\zeta' \in \mathbf{C}^{n-1}; \mathscr{R}(\zeta') = 0\} \times \mathbf{C})$ の m 重被覆面を Φ_X とし，M を

$$\Phi_X \setminus \{\zeta \in \Phi_X\,; R(\zeta')P_+(\zeta) = 0\}$$

のコンパクトチェイン，$M_r = \text{chain-}\{|x\zeta| = r\} \times M$ とする．ただし r は，$0 < l \le r$ のとき，$M_l \subset \Phi_{\mathbf{C}^n} \setminus \{\zeta \in \Phi_{\mathbf{C}^n}\,; R(\zeta')P_+(\zeta) = 0\}$ を満たす十分小さな r である．chain-$\{|x\zeta| = r\}$ には，$\theta(\mathrm{Re}\, x\zeta, \mathrm{Im}\, x\zeta) > 0$ の向きを入れておく．ここで $\theta(\mathrm{Re}\, x\zeta, \mathrm{Im}\, x\zeta)$ は，$\zeta = \xi + i\eta$ とすれば

$$\theta(\mathrm{Re}\, x\zeta, \mathrm{Im}\, x\zeta) = (x\xi)\, d(x\eta) - (x\eta)\, d(x\xi) \tag{16}$$

である．例えば M に $\omega' > 0$ の向きが入っているならば，M_r には $\theta(\mathrm{Re}\, x\zeta, \mathrm{Im}\, x\zeta) \wedge \omega' > 0$ の向きが入る．このとき tube operation

$$t_x : \Phi_X \setminus \{\zeta \in \Phi_X\,; R(\zeta')P_+(\zeta) = 0\} \to \Phi_{\mathbf{C}^n} \setminus (\{\zeta \in \Phi_{\mathbf{C}^n}\,; R(\zeta')P_+(\zeta) = 0\} \cup \Phi_X)$$

を，$t_x M = M_r$ で定義する．すなわち t_x は，M を M の周りの管に写す写像である．M_r の $\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}}$ への像 $M_r^\dagger$ は r の選び方に依存せず $H_{n-1}(\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}} \setminus ((RP_+)^\dagger \cup \Phi_{X^*}))$ の元を定める．$t_{x^\dagger}$ で t_x の誘導写像 $H_{n-2}(\Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^\dagger) \to H_{n-1}(\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}} \setminus ((RP_+)^\dagger \cup \Phi_{X^*}))$ をあらわせば，$t_{x^\dagger}$ は単射である．

定理 4.2 (Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式) $F_{k^0}(x)$ は (3) で与えたものとする．すると，$F_{k^0}(x)$ は $x \notin W(RP_+,\vartheta) \cup (-K_0(RP_+,\vartheta))$ のとき，x に関して実解析的で $q = r_{k^0} - n - |\nu| + 1 \ge 0$ のとき，

$$D^\nu F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{[\alpha_x^\dagger]} \chi_q^0(ix\xi)\xi^\nu R_{jk^0}(\xi')\xi_n^{j-1}(R(\xi')P_+(\xi))^{-1}\, \omega(\xi), \tag{17}$$

$q = r_{k^0} - n - |\nu| + 1 < 0$のとき,

$$D^\nu F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{t_x \dagger \partial[\alpha_x^\dagger]} \chi_q^0(ix\xi)\xi^\nu R_{jk^0}(\xi')\xi_n^{j-1}(R(\xi')P_+(\xi))^{-1}\omega(\xi). \quad (18)$$

ここで,

$$\chi_q^0(z) = \begin{cases} z^q/q!, & q \geq 0, \\ (-1)^{q+1}(-q-1)!z^q, & q < 0 \end{cases}$$

である.

□

(証明) $\nu = 0$の場合に(17),(18)を示せば十分である. $x \notin W(RP_+, \vartheta) \cup (-K_0(RP_+, \vartheta))$での$F_{k^0}(x)$の実解析性もこのことから従う. $F_{k^0}(x)$は前進基本解で, $x \notin -K_0(RP_+, \vartheta)$より$F_{k^0}(-x) = 0$. ゆえに補題4.1より,

$$\begin{aligned} F_{k^0}(x) &= F_{k^0}(x) - (-1)^{r_{k^0} - n + 1} F_{k^0}(-x) \\ &= (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^{r_{k^0} - n} \Big\{ \int_{|\xi|=1} \chi_{r_{k^0} - n + 1}(x\zeta) R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1}(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1}\omega(\zeta) \\ &\quad - \int_{|\xi|=1} \chi_{r_{k^0} - n + 1}(x\tilde{\zeta}) R_{jk^0}(\tilde{\zeta}')\tilde{\zeta}_n^{j-1}(R(\tilde{\zeta}')P_+(\tilde{\zeta}))^{-1}\omega(\tilde{\zeta}) \Big\} \\ &\qquad \zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta),\ \tilde{\zeta} = \xi - i(v(\xi) + \varepsilon|\xi|\vartheta). \end{aligned}$$

$\varepsilon \to +0$としても超関数の意味での積分として意味を持ち, (11)を使えば

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^{r_{k^0} - n + 1} \int_{|\xi|=1} \sigma_{r_{k^0} - n + 1}(x\xi) R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1}(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1}\omega(\zeta).$$

ただし, $\zeta = \xi - iv(\xi)$である.

$q = r_{k^0} - n + 1 \geq 0$のとき, (12)より

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^q \int_{|\xi|=1} 2^{-1}(\operatorname{sgn} x\xi) x^q/q! R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1}(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1}\omega(\zeta).$$

$2^{-1}(\operatorname{sgn} x\xi)$を積分範囲の$|\xi| = 1$に入れて考えれば, 積分範囲は$\mathcal{S}_X^{n-1}$となる. ゆえに(17)が成り立つ.

$q < 0$のとき, あとの便利のために$x = (1, 0, \ldots, 0)$とする. また$\xi'' = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$などとする. このとき$F_{k^0}(x)$は(13)より,

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^q \int_{|\xi|=1} \delta^{(-q-1)}(\zeta_1) R_{jk^0}(\zeta')(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1}\omega(\zeta).$$

また (5) より,

$$\omega(\xi) = d\xi_1 \wedge \omega_x(\xi'') + \xi_1 d\xi_2 \wedge \cdots \wedge d\xi_n,$$
$$\omega_x(\xi'') = -\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-2} \xi_j d\xi_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \cdots \wedge d\xi_n$$

被積分関数は $\{\xi_1 = 0\}$ に台をもつので, $|\xi|$ が ξ_1 に依らないとして, $\mathbf{R} \times \{|\xi''| = 1\}$ 上の積分に直すことができる. このとき $\omega(\zeta)$ は, $xv(\xi) = v_1(\xi) = 0$ より, $\mathbf{R} \times \{|\xi''| = 1\}$ 上で

$$\omega(\zeta) = d\zeta_1 \wedge \omega_x(\zeta'')$$

となる. ただし, $\zeta_1 = \xi_1$, $\zeta'' = \xi'' - iv(0, \xi'')''$ である. したがって,

$$\begin{aligned} F_{k^0}(x) &= (2\pi)^{1-n} i^q \sum_{j=1}^{\mu} \int_{|\xi''|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(-q-1)}(\zeta_1) R_{jk^0}(\zeta')(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1} d\zeta_1 \wedge \omega_x(\zeta'') \\ &= (2\pi)^{1-n} i^q \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\partial\tilde{\alpha}_{x,v}} (-\partial/\partial\zeta_1)^{-q-1} \{R_{jk^0}(\zeta')(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1}\}\Big|_{\zeta_1=0} \omega_x(\zeta'') \end{aligned} \tag{19}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \partial\tilde{\alpha}_{x,v} &= \text{chain-}\{\zeta'' = \xi'' - iv(0, \xi'')''; \xi'' \in \{|\xi''| = 1\}\} \\ &= \text{chain-}\{\zeta = \xi - iv(\xi); \xi \in \{x\xi = 0\} \cap \{|\xi| = 1\}\} \end{aligned}$$

は, $\omega_x(\zeta'') > 0$ の向きが入った $\Phi_X \setminus \{\zeta \in \mathbf{C}^n; R(\zeta')P_+(\zeta) = 0\}$ 上の $(n-2)$ 次元チェインである. $\beta_{x,r,v} = \text{chain-}\{|\zeta_1| = r\} \times \partial\tilde{\alpha}_{x,v}$ (r は $0 < l \le r$ のとき, $\{\zeta \in \beta_{x,l,v}\} \cap (\{\zeta \in \mathbf{C}^n; R(\zeta')P_+(\zeta) = 0\} \cup (\{\zeta' \in \mathbf{C}^{n-1}; \mathscr{R}(\zeta') = 0\} \times \mathbf{C})) = \varnothing$ を満たす) に, $\theta(\operatorname{Re}\zeta_1, \operatorname{Im}\zeta_1) \wedge \omega_x(\zeta'') > 0$ となるように向きを定めて, (19) に ζ_1 に関する Cauchy の積分表示

$$\begin{aligned} &2\pi i (\partial/\partial\zeta_1)^{-q-1} \{R_{jk^0}(\zeta')(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1}\}\Big|_{\zeta_1=0} \\ &\qquad = (-q-1)! \oint_{|\zeta_1|=r} R_{jk^0}(\zeta')(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1} \zeta_1^q \, d\zeta_1 \end{aligned} \tag{20}$$

を適用すれば,

$$\begin{aligned} F_{k^0}(x) &= -i(2\pi)^{-n} \int_{\beta_{x,r,v}} \chi_q^0(ix\zeta) R_{jk^0}(\zeta')(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1} \, d\zeta_1 \wedge \omega_x(\zeta'') \\ &= -i(2\pi)^{-n} \int_{\beta_{x,r,v}} \chi_q^0(ix\zeta) R_{jk^0}(\zeta')(R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1} \, \omega(\zeta). \end{aligned}$$

ただし，(19) の ζ_1 に関する微分は実の微分であるが，(20) の左辺の微分は複素微分であることに注意する．これは，ζ_1 に関する有理型関数が，ζ' を固定するごとに $\zeta_1 = 0$ の複素近傍で正則であることから正当化される．また，(20) の右辺の積分路は反時計回りである．$\beta_{x,r,v}$ の $\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}}$ における像は $t_{x^\dagger}\partial[\alpha_x^\dagger]$ の代表元であるから (18) も証明できた．

■

Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式を使って，境界値問題 (BP) の基本解 $F_{k^0}(x)$ のラキュナを見つける．まず，ラキュナの定義を [1] から引用すると，

定義 4.3 $\Omega \in \mathbf{R}^n$ を開集合，$u \in \mathscr{D}'(\Omega)$，$L$ を $\Omega \setminus \operatorname{sing\,supp} u$ の一つの連結成分とする．$y \in \partial L$ のとき，u が y において L から sharp，あるいは y において L から sharp front をもつとは，y のある近傍 M が存在して，u が L から $\overline{L} \cap M$ に C^∞ 級に延長できることをいう．u が ∂L のすべての点において L から sharp であるとき，L は u の lacuna であるといい，特に u が L で恒等的に 0 であるとき，L は u の strong lacuna であるという．また，sharp でないことを diffuse，あるいは non-sharp という．

□

一般には $\operatorname{sing\,supp} F_{k^0}(x) \subset W(RP_+, \vartheta)$ であるから，$F_{k^0}(x)$ のラキュナを見つけるには $\operatorname{sing\,supp} F_{k^0}(x)$ を正確に記述しなければならない．しかし一般の双曲型境界値問題に対しては，今までのところ不可能である．したがって，次の regular lacuna を定義する．

定義 4.4 $\mathbf{R}^n \backslash W(RP_+, \vartheta)$ の一つの連結成分 L が $F_{k^0}(x)$ の lacuna であるとき，L を regular lacuna という．特に，$F_{k^0}(x)$ の台は $K_0(RP_+, \vartheta)$ に含まれるので，$\mathbf{R}^n \setminus K_0(RP_+, \vartheta)$ は常に $F_{k^0}(x)$ の strong lacuna である．これを trivial lacuna という．

□

この regular lacuna の定義と定理 4.2 より次が成り立つ．

定理 4.5 $x \in \mathscr{O} = \{\mathbf{R}^n \setminus (W(RP_+, \vartheta) \cup (-K_0(RP_+, \vartheta)))$ の一つの連結成分$\}$ とする．

(i). $r_{k^0} \geq n-1$ かつ $[\alpha_x^\dagger] = 0$ ならば，$\mathscr{O}$ は $F_{k^0}(x)$ の strong regular lacuna である．

(ii). $r_{k^0} < n-1$ かつ $\partial[\alpha_x^\dagger] = 0$ ならば，$\mathscr{O}$ は $F_{k^0}(x)$ の strong regular lacuna である．

(iii). $\partial[\alpha_x^\dagger] = 0$ ならば，$\mathscr{O}$ は $F_{k^0}(x)$ の regular lacuna である．

□

これが本稿の主結果である．例については次の節で見ることにする．

最初に書いたように，仮定 (A-1) は次の (A-1)' に弱めることができる．

(A-1)'. $P(\xi) = \prod_{l=1}^{L} P_l(\xi)^{\nu_l}$ と因数分解でき，$P_l(\xi)$ $(1 \leq l \leq L)$ は互いに異なっており，$\vartheta = (1, 0, \ldots, 0)$ に関して双曲型で，$\mathbf{C}$ で既約である．

(A-2)'. P_l と $\frac{\partial P_l}{\partial \xi_n}$ の ξ_n に関する終結式 $\mathscr{R}_l(\xi')$ $(1 \le l \le L)$ の $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ での局所化が ϑ' に関して双曲型である.

すなわち $P(\xi)$ が既約多項式でなくとも，既約多項式の積に因数分解されるのならば，少しの修正で Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式をつくることができる.

$\mathscr{R}(\xi')$ をあらためて

$$\mathscr{R}(\xi') = \prod_{l=1}^{L} \mathscr{R}_l(\xi')$$

とおき，$P_l(\xi)$ が m_l 次斉次多項式とすると $\Phi_{\mathbf{P}^{n-1}}$, Φ_{X^*} をそれぞれ $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})\backslash\mathscr{R}^*$, $X^*\backslash\mathscr{R}^*$ の $\prod_{l=1}^{L} m_l$ 重被覆面と変更すればよい.

5 例

最後に，初期値問題ではあらわれなかった側面波や境界波があらわれる場合のラキュナの例を見てみる．ここで，側面波とは分岐集合 $\{\zeta' \in \mathbf{R}^{n-1}; \mathscr{R}(\zeta') = 0\}$ が原因で発生する波のことをいい，境界波とは特性集合 $\{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}; R(\xi') = 0\}$ が原因で発生する波のことをいう.

まず側面波があらわれるような例を考える.

例 5.1 (BP) において

$$P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)(\xi_1 + 2\xi_3),$$
$$B_1(\xi) = 1,\quad B_2(\xi) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

とする．このとき，$P_+(\xi) = (\xi_3 - \lambda_1^+(\xi'))(2\xi_3 + \xi_1)$ とすれば,

$$L(\xi') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}\xi_1 + \xi_2 + \lambda_1^+(\xi') \end{pmatrix},$$
$$R(\xi') \equiv -1,$$
$$F_1(x) = -(2\pi)^{-3} i^{-1} \int_{\mathbf{R}^3 - is\vartheta} e^{ix\xi} (\frac{1}{2}\xi_1 + \xi_2 + \lambda_1^+(\xi') - \xi_3) P_+(\xi)^{-1}\, d\xi,$$
$$F_2(x) = (2\pi)^{-3} i^{-1} \int_{\mathbf{R}^3 - is\vartheta} e^{ix\xi} P_+(\xi)^{-1}\, d\xi$$

である．したがって，境界波はあらわれない．しかし，$\xi = (1, \pm 1, -\frac{1}{2})$ での $\mathscr{R}$, P_+ の局所化を考えればわかるように,

$$\Gamma'_{\xi'}(\mathscr{R}, \vartheta') = \{\eta \in \mathbf{R}^2; \eta_1 \mp \eta_2 > 0\},$$
$$\Gamma_\xi(P_+, \vartheta) = (\Gamma'_{\xi'}(\mathscr{R}, \vartheta') \times \mathbf{R}) \cap \{\zeta \in \mathbf{R}^3; \zeta_1 + 2\zeta_3 > 0\}$$

となる．ゆえに，側面波があらわれるのがわかる．このとき，一部が側面波で区切られた領域の中の点 $x^0 = (1, \pm\frac{4}{15}, \frac{3}{2})$ において，$\partial[\alpha^{\dagger}_{x^0}] = 0$ である．したがって，x^0 を含む領域は strong regular lacuna である．

次に境界波があらわれる例を見てみる．

例 5.2 (BP) において

$$P(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2, \quad B_1(\xi) = \xi_2 + \xi_3$$

とする．このとき，$P_+(\xi) = \xi_3 - \lambda_1^+(\xi')$ とすれば，

$$L(\xi') = R(\xi') = \lambda_1^+(\xi') + \xi_2,$$
$$F(x) = F_1(x) = (2\pi)^{-3} i^{-1} \int_{\mathbf{R}^3 - is\vartheta} e^{ix\xi} (R(\xi') P_+(\xi))^{-1} \, d\xi$$

である．$\xi' = (1, 1/\sqrt{2})$ での $R(\xi')$ の局所化を考えれば，

$$\Gamma'_{\xi'}(R, \vartheta') = \{\eta' \in \mathbf{R}^2 \,; \eta_1 - \sqrt{2}\eta_2 > 0\}$$

である．したがって，境界波があらわれるのがわかる．このとき，一部が境界波で区切られた領域の中の点 $x^0 = (1, -\frac{6}{5}, \frac{1}{10})$ において，$\partial[\alpha^{\dagger}_{x^0}] = 0$ である．したがって，x^0 を含む領域は strong regular lacuna である．

初期値問題の場合は，時空 4 次元の波動方程式について，Huygens の原理が成立することが，Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式より確認できたが，(17),(18) の境界値問題の Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式からは，それを確認することができない (修正すれば確認できるのかも知れないが)．恐らく，(17),(18) を修正した Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式から Huygens の原理が確認できると，側面波があらわれたり，あらわれなかったりする現象が解明できるであろう．

例 5.3 (BP) において

$$P(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2, \quad B_1(\xi) = 1$$

とする．このとき，$P_+(\xi) = \xi_3 - \lambda_1^+(\xi')$ とすれば，

$$L(\xi') = R(\xi') \equiv 1,$$
$$F(x) = F_1(x) = (2\pi)^{-4} i^{-1} \int_{\mathbf{R}^4 - is\vartheta} e^{ix\xi} (R(\xi') P_+(\xi))^{-1} \, d\xi$$

である．$F(x)$ を Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式 (18) を使って書き直しても，伝播錐の中の点 $x^0 = (1, 0, 0, 0)$ において，$\partial[\alpha^{\dagger}_{x^0}] \neq 0$ である．したがって，(18) からでは Huygens の原理を確認できない．

参考文献

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and L. Gårding. Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, II. *Acta Math.*, Vol. 124, pp. 109-189, 1970; Vol. 131, pp. 145-206, 1973.

[2]I. M. Gel'fand and G. E. Shilov. *Generalized functions I.* Academic Press, New York, 1964.

[3] S. Wakabayashi. Singularities of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 11, pp. 417-440, 1976.

[4] S. Wakabayashi. Analytic wave front sets of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 11, pp. 785-807, 1976.